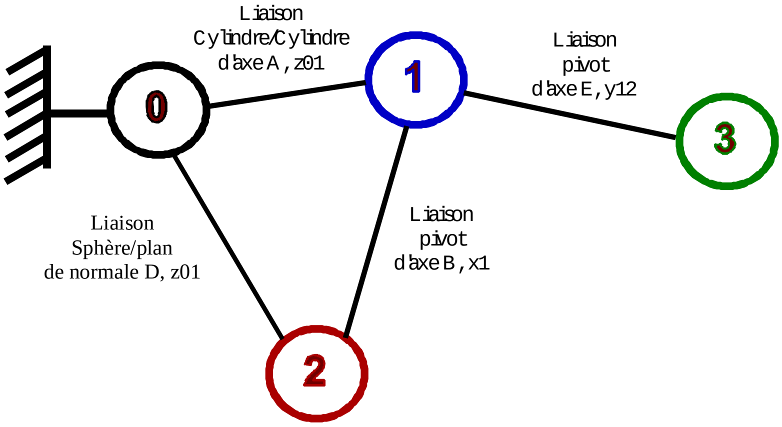
Cinématique du SOLIDE INDÉFORMABLE
TD 3 : Cinématique d'un manège

1 CORRECTION

1.1 Tracer le graphe de structure du modèle du manège présenté ci-dessus.

Ce graphe conduit entre autre, à définir la géométrie suivante :

$$\overrightarrow{AB} = L.\overrightarrow{x_1}\ ;\ \overrightarrow{CD} = r.\overrightarrow{z_1}\ ;\ \overrightarrow{CB} = e.\overrightarrow{y_2}\ ;\ \overrightarrow{BE} = d.\overrightarrow{z_1}\ ;\ \overrightarrow{EG} = -a.\overrightarrow{z_3}$$



1.1.1 JUSTIFIER LA DONNEE DE CES VECTEURS.

Les points A, E, B, D sont des points intervenants dans le graphe des liaisons. Le point G est un point appartenant à S3, dont on cherche la cinématique.

Le point C est le centre du cercle de la roue du solide S2.

Conclusion : six points, intervenants dans le graphe des liaisons, nous amènent la géométrie juste nécessaire pour définir la cinématique (et la statique) du mécanisme. Cinq vecteurs sont donc à définir..

$$\overrightarrow{AB} = L.\overrightarrow{x_1}\ ;\ \overrightarrow{CD} = r.\overrightarrow{z_1}\ ;\ \overrightarrow{CB} = e.\overrightarrow{y_2}\ ;\ \overrightarrow{BE} = d.\overrightarrow{z_1}\ ;\ \overrightarrow{EG} = -a.\overrightarrow{y_3}$$

1.2 Donner les mobilités du mécanisme schématisé en figure 1.

Il y à trois mobilités.

1. La mobilité motrice qui est définie par l'angle $\alpha(t)=(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2})$. Cette mobilité est appelée aussi mobilité utile.
2. La mobilité due à la rotation du solide S1 et définie par l'angle $\gamma(t)=(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1})$. Cette mobilité est totalement indépendante de la précédente.
3. La dernière mobilité est l'angle $\beta(t)=(\overrightarrow{z_1},\overrightarrow{z_3})$. Cette mobilité permet le basculement du siège accueillant de client.

Cette étude nous amène à définir les angles : $\gamma(t)=(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}),\alpha(t)=(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2})$ et $\beta(t)=(\overrightarrow{z_1},\overrightarrow{z_3})$.

Remarque :

Toute la cinématique sera définie à partir des mobilités $(\alpha,\dot{\alpha},\ddot{\alpha});(\beta,\dot{\beta},\ddot{\beta})et(\gamma,\dot{\gamma},\ddot{\gamma})$. Ces mobilités ne pourront être connues lors de l'étude dynamique ou peuvent être imposées en partie par le client du manège ou des normes de sécurité.

1.3 Vérifier que le modèle proposé est isostatique. (Résoluble en cinématique ou par le principe fondamental de la mécanique)

Le problème d'isostatisme ne peut se poser que s'il existe au moins une boucle dans le graphe des liaisons (les arcs devant être modélisés que par des liaisons usuelles).

Méthode : Nous allons comparer le nombre d'équations indépendantes donner par composition de mouvement, notées Ec (mécanique Newtonienne) aux inconnues cinématiques effectives (notée ici inconnues cinématiques principales Icp).

Définition : le nombre cyclomatique est le nombre de boucle indépendante du graphe des liaisons et est noté γ.

- Ici le nombre cyclomatique $\gamma = 1$

Le nombre d'équations scalaires indépendantes au sens de la cinématique est égal : $Ec = 6.\gamma$

Ces équations sont obtenues par fermeture cinématique : $\{V_{0/1}\} + \{V_{1/2}\} + \{V_{2/0}\} = 0$

- Le nombre d'équations scalaires indépendantes Ec=6

Le nombre total d'inconnues cinématiques : c'est le nombre de composantes non nulles dans les liaisons intervenant dans le graphe des liaisons.

- Le nombre total d'inconnues cinématiques Ic=9

Les inconnues cinématiques effectives (notée ici inconnues cinématiques principales Icp).

Les mobilités $(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}); (\beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta})\, et (\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$ sont des données en cinématiques et ici m=3, d'où :

- Les inconnues cinématiques principales $Icp = Ic - m = 6$

Conclusion : Le système est isostatique, c'est à dire résoluble (pas de surabondance de contacts géométriques)

- D'où $\boxed{h = Ic - m - Ec = Icp - Ec = 0}$

1.4 Exprimer la vitesse $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ en fonction de la mobilité utile $\alpha(t)$

Il faut donc recherche : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R0}$

Pour ce faire, le mouvement du point A dépendant de la chaîne cinématique (A,B,D), il faut écrire la fermeture géométrique lue sur le graphe de structure. On obtient ;

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}}$$

Décomposer, à l'aide de CHASLES ces vecteurs de telle sorte que chacun soit colinéaire à l'un des axes des base données dans le paramétrage. Il vient donc en faisant intervenir le vecteur $\overrightarrow{OA}$:

$$\boxed{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HO} = \vec{0}}$$

$$\overrightarrow{OA} + L\overrightarrow{x_{12}} - e\overrightarrow{y_2} - r\overrightarrow{z_{01}} + e\cos\alpha\,\overrightarrow{y_1} - L\overrightarrow{x_{12}} = \vec{0}$$

en projetant dans R_1, (c'est l'indice intervenant le plus dans cette équation vectorielle, on obtient :

$$\overrightarrow{OA} = e\cos\alpha\,\overrightarrow{y_1} + e\sin\alpha\,\overrightarrow{z_{01}} + r\,\overrightarrow{z_{01}} - e\cos\alpha\,\overrightarrow{y_1}$$ d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = e\sin\alpha\,\overrightarrow{z_{01}} + r\,\overrightarrow{z_{01}}}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R0} = e\dot{\alpha}\sin\alpha.\overrightarrow{z_{01}}}$$

Remarque : nous connaissons maintenant le torseur cinématique modélisant la cinématique dans le mouvement du solide S1 par rapport au solide S0.

$$\left\{V_{S1/S0}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}} = \dot{\gamma}.\overrightarrow{z_{01}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = e\dot{\alpha}\sin\alpha.\overrightarrow{z_{01}} \end{matrix}\right\}_A$$

La cinématique de 1/0 est donc entièrement déterminée.

1.5 Exprimer la vitesse $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ en fonction des mobilités $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$

$\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = \vec{0}$: liaison pivot en B entre les solides S1 et S2. d'où :

$$\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} \text{ et } \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ e\dot{\alpha}\sin\alpha \end{vmatrix}_{R1} + \begin{vmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R1} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix}_{R1} = \begin{vmatrix} 0 \\ -L\dot{\gamma} \\ e\dot{\alpha}\sin\alpha \end{vmatrix}_{R1} \\ &\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = -L\dot{\gamma}.\overrightarrow{y_1} + e\dot{\alpha}\sin\alpha.\overrightarrow{z_{01}} \end{aligned}}$$

Remarque : nous connaissons maintenant le torseur cinématique modélisant la cinématique dans le mouvement du solide S2 par rapport au solide S0. $\overrightarrow{\Omega_{S2/S0}} = \dot{\gamma}.\overrightarrow{z_{01}} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{12}}$

$$\left\{V_{S2/S0}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S2/S0}} = \dot{\gamma}.\overrightarrow{z_{01}} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{12}} \\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = -L\dot{\gamma}.\overrightarrow{y_1} + e\dot{\alpha}\sin\alpha.\overrightarrow{z_{01}} \end{matrix}\right\}_B$$

La cinématique de 2/0 est donc entièrement déterminée.

1.6 Exprimer la vitesse $\overrightarrow{V_{E\in 1/0}}$ en fonction des mobilités $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$

$\overrightarrow{V_{E\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{E\in 3/1}} + \overrightarrow{V_{E\in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{E\in 3/1}} = \vec{0}$: liaison pivot en E entre les solides S1 et S3. d'où :

$$\overrightarrow{V_{E\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{E\in 1/0}} \text{ et } \overrightarrow{V_{E\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} + \overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\overrightarrow{V_{E\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{E\in 1/0}} = \begin{vmatrix} 0 \\ -L\dot{\gamma} \\ e\dot{\alpha}\sin\alpha \end{vmatrix}_{R1} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{vmatrix}_{R1} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix}_{R1} = \begin{vmatrix} 0 \\ -L\dot{\gamma} \\ e\dot{\alpha}\sin\alpha \end{vmatrix}_{R1} \\ &\overrightarrow{V_{E\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{E\in 1/0}} = -L\dot{\gamma}.\overrightarrow{y_1} + e\dot{\alpha}\sin\alpha.\overrightarrow{z_{01}} \end{aligned}}$$

Remarque : nous connaissons maintenant le torseur cinématique modélisant la cinématique dans le mouvement du solide S3 par rapport au solide S0. $\overrightarrow{\Omega_{S3/S0}} = \dot{\gamma}.\overrightarrow{z_{01}} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{12}} + \dot{\beta}.\overrightarrow{y_{13}}$

$$\{V_{S3/S0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S3/S0}} = \dot{\gamma}.\overrightarrow{z_{01}} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{12}} + \dot{\beta}.\overrightarrow{y_{13}} \\ \overrightarrow{V_{E\in 3/0}} = -L\dot{\gamma}.\overrightarrow{y_1} + e\dot{\alpha}\sin\alpha.\overrightarrow{z_{01}} \end{Bmatrix}_E$$

La cinématique de 3/0 est donc entièrement déterminée.

Bilan des connaissances cinématiques actuelles du mécanisme :

On remarque que maintenant toute la cinématique du mécanisme est connue. Tous les torseurs cinématiques des différents mouvements sont explicités en fonction des mobilités $(\alpha,\dot{\alpha},\ddot{\alpha});(\beta,\dot{\beta},\ddot{\beta})et(\gamma,\dot{\gamma},\ddot{\gamma})$.

$$\{V_{S2/S1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S2/S1}} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{12}} \\ \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

Liaison pivot d'axe $B,\overrightarrow{x_{12}}$

$$\{V_{S3/S1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S3/S1}} = \dot{\beta}.\overrightarrow{y_{13}} \\ \overrightarrow{V_{E\in 3/1}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_E$$

Liaison pivot d'axe $E,\overrightarrow{y_{13}}$

$$\{V_{S1/S0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}} = \dot{\gamma}.\overrightarrow{z_{01}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = e\dot{\alpha}\sin\alpha.\overrightarrow{z_{01}} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{V_{S2/S0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S2/S0}} = \dot{\gamma}.\overrightarrow{z_{01}} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{12}} \\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = -L\dot{\gamma}.\overrightarrow{y_1} + e\dot{\alpha}\sin\alpha.\overrightarrow{z_{01}} \end{Bmatrix}_B$$

$$\{V_{S3/S0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S3/S0}} = \dot{\gamma}.\overrightarrow{z_{01}} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{12}} + \dot{\beta}.\overrightarrow{y_{13}} \\ \overrightarrow{V_{E\in 3/0}} = -L\dot{\gamma}.\overrightarrow{y_1} + e\dot{\alpha}\sin\alpha.\overrightarrow{z_{01}} \end{Bmatrix}_E$$

1.7 Exprimer la vitesse $\overrightarrow{V_{G\in 3/0}}$ en fonction des mobilités $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ et $\beta(t)$

Par le champs antisymétrique dans le mouvement de S3 par rapport à S0, on obtient

$$\overrightarrow{V_{G\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{E\in 3/0}} + \overrightarrow{GE} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S3/S0}}$$

$$\overrightarrow{V_{G\in 3/0}} = \begin{vmatrix} 0 \\ -L\dot{\gamma} \\ e\dot{\alpha}\sin\alpha \end{vmatrix}_{R1} + \begin{vmatrix} -a\sin\beta \\ 0 \\ a\cos\beta \end{vmatrix}_{R1} \wedge \begin{vmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix}_{R1} = \begin{vmatrix} -a\dot{\beta}\cos\beta \\ -L\dot{\gamma} + a\dot{\gamma}\sin\beta + a\dot{\alpha}\cos\beta \\ e\dot{\alpha}\sin\alpha - a\dot{\beta}\sin\beta \end{vmatrix}_{R1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_{G\in 3/0}} = \begin{vmatrix} -a\dot{\beta}\cos\beta \\ -L\dot{\gamma} + a\dot{\gamma}\sin\beta + a\dot{\alpha}\cos\beta \\ e\dot{\alpha}\sin\alpha - a\dot{\beta}\sin\beta \end{vmatrix}_{R1}}$$

1.8 Exprimer la composante sur $\overrightarrow{x_1}$ de l'accélération du point G dans le mouvement de 3/0.

$$\overrightarrow{\Gamma_{G\in 3/0}} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{E\in 3/0}}}{dt}\right)_{R0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\left(\overrightarrow{V_{E\in 3/0}}.\overrightarrow{x_1}\right)}{dt}\right)_{R0} = \overrightarrow{\Gamma_{G\in 3/0}}.\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{V_{E\in 3/0}}.\left(\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_{R0} \quad \text{d'où :}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{G\in 3/0}}.\overrightarrow{x_1} = \left(\frac{d\left(\overrightarrow{V_{E\in 3/0}}.\overrightarrow{x_1}\right)}{dt}\right)_{R0} - \overrightarrow{V_{E\in 3/0}}.\left(\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_{R0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{G\in 3/0}}.\overrightarrow{x_1} = -a\ddot{\beta}\cos\beta + a\dot{\beta}^2\cos\beta + \left[\begin{vmatrix} -a\dot{\beta}\cos\beta \\ -L\dot{\gamma} + a\dot{\gamma}\sin\beta + a\dot{\alpha}\cos\beta \\ e\dot{\alpha}\sin\alpha - a\dot{\beta}\sin\beta \end{vmatrix}_{R1}\right] . \left[\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix}_{R1} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R1}\right]$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{G\in 3/0}}.\overrightarrow{x_1} = -a\ddot{\beta}\cos\beta + a\dot{\beta}^2\cos\beta + \dot{\gamma}\left(-L\dot{\gamma} + a\dot{\gamma}\sin\beta + a\dot{\alpha}\cos\beta\right)}$$

1.9 Exprimer la vitesse de glissement au point de contact roue-sol, $\overrightarrow{V_{D\in 2/0}}$ en fonction des mobilités $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$

$$\left\{V_{S2/S0}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{S2/S0}} = \dot{\gamma}.\overrightarrow{z_{01}} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_{12}} \\ \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = -L\dot{\gamma}.\overrightarrow{y_1} + e\dot{\alpha}\sin\alpha.\overrightarrow{z_{01}} \end{array} \right\}_B$$

$$\overrightarrow{V_{D\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} + \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S2/S0}} = {}_{R1}\left|\begin{array}{c} 0 \\ -L\dot{\gamma} \\ e\dot{\alpha}\sin\alpha \end{array}\right. + {}_{R1}\left|\begin{array}{c} 0 \\ e\cos\alpha \\ r+e\sin\alpha \end{array}\right. \wedge {}_{R1}\left|\begin{array}{c} \dot{\alpha} \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_{D\in 2/0}} = {}_{R1}\left|\begin{array}{c} e\dot{\gamma}\cos\alpha \\ -L\dot{\gamma}+\dot{\alpha}(r+e\sin\alpha) \\ e\dot{\alpha}\sin\alpha - e\dot{\alpha}\cos\alpha \end{array}\right.}$$

1.10 Rechercher la relation entre les différentes mobilités sous la condition d'adhérence au point D au contact roue-sol.

$$\overrightarrow{V_{D\in 2/0}} = \vec{0} \text{ d'où le système } \left|\begin{array}{c} e\dot{\gamma}\cos\alpha = 0 \\ -L\dot{\gamma}+\dot{\alpha}(r+e\sin\alpha) = 0 \\ e\dot{\alpha}\sin\alpha - e\dot{\alpha}\cos\alpha = 0 \end{array}\right.$$

si $\dot{\alpha} \neq 0$ et $\dot{\gamma} \neq 0$ (sinon pas de mouvement donc pas de glissement en D) et que $\overrightarrow{V_{D\in 2/0}} = \vec{0}$ alors les mobilités $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$ sont liées par la relation : $-L\dot{\gamma}+\dot{\alpha}(r+e\sin\alpha) = 0$